

ROCAS, MINERALES Y MATEMÁTICAS O CÓMO APLICAR LA MATEMÁTICA EN EL ESTUDIO DE LA TIERRA

Pilar López González-Nieto y Rafael Lahoz-Beltrá

*Departamento de Matemática Aplicada (Biomatemática), Facultad de Biología.
Universidad Complutense - 28040 Madrid*

Palabras clave: matemáticas y geología, Python, nuevas tecnologías en educación.

Keywords: mathematics and geology, Python, new technologies in education.

Resumen

En el presente trabajo se describen los primeros pasos de un proyecto de innovación docente con el objetivo de crear un laboratorio de geomatemática útil para los alumnos del Grado en Geología y el Grado en Ingeniería Geológica. Por medio de scripts en lenguaje Python los estudiantes aprenden a aplicar las Matemáticas y Estadística a situaciones características en Geología, desarrollando habilidades orientadas a la aplicación de los modelos matemáticos (por ej., test estadísticos) y de la utilización del cálculo simbólico (por ej. cálculo integral) en experimentos de campo o laboratorio.

Abstract

In this paper we describe the first steps of a teaching innovation project with the aim of creating a Geomathematics laboratory useful for students of the Degree in Geology and Geological Engineering. Using scripts in Python language students learn to apply Mathematics and Statistics to situations characteristics in Geology. In addition students learn the application of mathematical models (e.g. statistical tests) and the use of symbolic computation methods (e.g. integral calculus) in field or laboratory experiments.

INTRODUCCIÓN

Desde sus inicios la Geología es una disciplina que ha experimentado profundos cambios. Entre estos cambios, y debido a la popularización del ordenador y de las TIC, la Geología ha experimentado un paulatino proceso de 'matematización', utilizándose de cada vez más el lenguaje de las matemáticas en el estudio de las ciencias de la Tierra. Aunque la Geología ya utilizaba las Matemáticas, por ejemplo la aplicación de la trigonometría en topografía o de la teoría de probabilidad en la búsqueda de recursos naturales como el petróleo, durante las últimas décadas abundan los ejemplos en los que esta disciplina es aplicada con éxito. Así por ejemplo, muchos fenómenos geológicos observables en la superficie de la Tierra pueden ser tratados por medio del cálculo integral. Tal es el caso de los efectos de las presiones litostáticas e hidrostáticas, el plegamiento en formaciones geológicas o la evolución de la erosión en un

terreno. En el ámbito de la Matemática otros ejemplos que ilustran su utilidad son la aplicación del cálculo vectorial en el estudio de distintas propiedades físicas de la corteza terrestre y oceánica; el uso del polinomio de Taylor en el estudio de la temperatura o el uso de las ecuaciones diferenciales en el estudio del decaimiento de un isótopo y su aplicación en técnicas de datación, por ejemplo en paleontología. En otros casos, el geólogo aplica la Estadística en su trabajo de campo o laboratorio. En el ámbito de esta disciplina la aplicación de métodos estadísticos es de gran utilidad en el estudio de la distribución de los guijarros, el cálculo de la probabilidad de un terremoto o de impacto de un asteroide en nuestro planeta. Se trata tan sólo de algunos ejemplos que ilustran el beneficio que supone la aplicación de técnicas matemáticas y estadísticas en Geología.

En este trabajo presentamos una colección de materiales docentes que ponen al alcance de los estudiantes un laboratorio virtual de modelos matemáticos y de simulación. Con la ayuda del ordenador, y desde un planteamiento multidisciplinar, los estudiantes aprenden tanto conceptos de matemáticas, estadística y *geoinformática* como de ciencias de la Tierra. Esta experiencia docente está orientada tanto a alumnos de Bachiller como del primer curso del Grado e Ingeniería en Geología.

A finales de siglo XVIII la figura de James Hutton (1726-1797) es considerada como el fundador de la geología moderna, gracias a sus teorías relativas a la edad de la Tierra, el tiempo geológico y el ciclo de las rocas. Hasta entonces, la Geología era una disciplina totalmente cualitativa, es decir, observacional y descriptiva. Entre otras contribuciones, Hutton introdujo en sus teorías la componente esencial del razonamiento científico: la búsqueda de pruebas que avalasen su teoría sobre la historia geológica de la Tierra, y en particular la utilización de fósiles como una de las fuentes de evidencia. Con su trabajo, se sentaron las bases de la necesidad de extraer conclusiones basadas en observaciones cuidadosamente registradas. James Hutton influyó en dos destacados científicos: John Playfair (1748-1819), profesor de Matemáticas que formuló unas descripciones claras de la erosión fluvial y el transporte de bloques erráticos por glaciares antiguos; y el geólogo Charles Lyell (1797-1875) que publicó la obra *Principios de geología* (*Principles of Geology*) entre 1830 y 1833, una de las obras de Geología más influyentes del siglo XIX.

Mientras que durante el siglo XVIII los avances en Geología son el resultado de los progresos experimentados *dentro* de esta disciplina, por ejemplo en Mineralogía, Geología Minera, Sismología y Sedimentología; en los siglos XIX y XX, tales avances son explicados desde *fuera* de esta disciplina: los geólogos toman medidas (*geomatemática*) y calculan frecuencias o probabilidades (*geoestadística*). De esta manera la Geología pasa del estudio puramente cualitativo o descriptivo a un estudio que comprende lo cuantitativo, es decir, la cuantificación de los conceptos. El resultado de este proceso es la introducción definitiva del método científico en Geología y con él de las Matemáticas como una herramienta completa para la modelización, y por tanto el estudio, de los fenómenos terrestres.

OBJETIVOS DE LA PROPUESTA DE INNOVACIÓN DIDÁCTICA

El proyecto se orienta a la resolución del desafío que supone al profesor encontrar estrategias que permitan lograr aquellos objetivos por los que las Matemáticas y la Estadística son esenciales en la formación de los alumnos del Grado en Geología e Ingeniería Geológica. Entre dichos objetivos destacamos los siguientes objetivos principales:

- I. Desarrollar la capacidad para resolver en sus distintas etapas problemas matemáticos en Geología. Es decir, el planteamiento, búsqueda de una solución, su desarrollo o formulación y su implementación en un programa de ordenador. La consecución de este objetivo, ya fue estudiado años atrás en un proyecto de innovación educativa realizado¹ con estudiantes del Grado en Biología de la Universidad

¹ R. LAHOZ-BELTRÁ *et al.* 2011. Adaptación de las Matemáticas para biólogos al plan Bolonia: dificultades y retos. En: *Investigación y Didáctica para las Aulas del Siglo XXI*. Actas del I Congreso de Docentes de Ciencias de la Naturaleza (M. GÓNZALEZ MONTERO DE ESPINOSA y A. BARATAS DÍAZ, eds.), Santillana Educación: 155-164.

Complutense de Madrid. Una de las conclusiones fue la necesidad de fomentar en los estudiantes la capacidad para formular el modelo matemático, programar en ordenador y aplicar modelos analíticos y numéricos de cálculo.

2. Aprender a interpretar los resultados obtenidos con el ordenador; el *output*, en el contexto de la Geología.
3. Introducir en el alumnado el concepto de *Laboratorio de Geomatemática*. Se trata de un conjunto de ordenadores equipados con software matemático de cálculo simbólico y análisis estadístico² de datos. En el ámbito de la Biomatemática los primeros laboratorios de esta disciplina datan de la década de los años 40, en particular el *Mathematical Laboratory* de la Universidad de Cambridge (Reino Unido, 1938) y el instalado en el *Courant Institute*, Universidad de Nueva York (Estados Unidos, 1946). De forma similar, el Laboratorio de Geomatemática sería el equivalente al de Biomatemática, y también uno más de los utilizados en Geología junto con el laboratorio de crecimiento cristalino, sedimentología o el laboratorio de hidrología e hidrogeología.

Adicionalmente, otros objetivos son mejorar la comprensión de las situaciones geológicas, ya se sean problemas geofísicos, experimentales, geológicos, etc.; la gestión de los procesos que llevan a encontrar la solución del problema y especialmente resolver las dificultades y carencias del cálculo «a mano» ampliamente extendidas entre los estudiantes. Por ello, se elegirán problemas geológicos que tengan en común la realización de cálculos matemáticos durante la resolución del modelo matemático asociado. Dichos cálculos se realizarán tanto «a mano» como mediante el uso de un *software* o lenguaje de programación de modo que el alumno realice una verificación in situ de sus resultados.

METODOLOGÍA

La metodología docente puede resumirse como se describe a continuación. En primer lugar, el laboratorio comienza con el *planteamiento* a los alumnos de un problema o «caso de estudio» dentro del ámbito de la Geología para cuya resolución se requiere de las Matemáticas. La solución a los casos planteados se abordará según sea la naturaleza del problema planteado: si es un fenómeno determinista utilizando una metodología matemática, por ejemplo el cálculo diferencial e integral, o si se trata de un fenómeno estocástico por medio de una metodología estadística, por ejemplo aplicando técnicas de estadística descriptiva o estadística inferencial. La idea base es la resolución conjunta, esto es tanto *a mano* como vía *software matemático*, del problema en cuestión. Con este criterio logramos un triple objetivo: (a) los alumnos verifican sus resultados, (b) aprenden a manejar un software matemático y (c) utilizan dicho software para la resolución completa de un problema o de alguna de las etapas del problema cuya resolución a mano es difícil o compleja. En este proyecto proponemos como software matemático la utilización de un lenguaje de programación de alto nivel y multipropósito, tal es el caso de *Python*³. En la actualidad es uno de los lenguajes más usados en el desarrollo de software, pudiendo ser utilizado en diversas plataformas, por ejemplo Raspberry Pi y *smartphones*, y distintos sistemas operativos (Windows, MacOS y Linux). Es un lenguaje que no tiene un ámbito de aplicación restringido, pudiéndose desarrollar software para aplicaciones científicas⁴, por ejemplo en Matemáticas y Estadística e incluso en Geología. Python es un lenguaje en código abierto, muy productivo, potente, flexible y con una sintaxis concisa y

² R. LAHOZ-BELTRÁ, M. GÓMEZ FLECHOSO, 2015. El «Laboratorio de Biomatemática» en la docencia de la Matemática Aplicada a la Biología.. En: *Jornadas sobre Investigación y Didáctica en ESO y Bachillerato*. Actas del III Congreso de Docentes de Ciencias de la Naturaleza (M. GÓNZALEZ MONTERO DE ESPINOSA, A. BARATAS DÍAZ, A. BARNDI FERNÁNDEZ eds.), Santillana Educación: 411-418.

³ <https://www.python.org/>

⁴ Véase el siguiente artículo: WEI-BING J., 2012. Why Python is the next wave in earth sciences computing. *American Meteorological Society*: 1823-1824

legible, tratándose de un lenguaje interpretado por lo que no requiere compilación. Estas características lo hacen idóneo para un alumnado de un Grado en ciencias, sin conocimientos avanzados de informática. Finalmente, y entre otras ventajas, Python permite una visualización de datos avanzada al estilo de Matlab, el trabajo con matrices y tablas, computación simbólica, cálculos estadísticos avanzados y aplicar algoritmos de *Machine Learning* contando en la actualidad con una gran colección de librerías. A día de hoy disponemos de algunos programas o *scripts* en Python, repartidos en las dos siguientes categorías:

- Programas de matemáticas referidos a aplicaciones de las técnicas matemáticas⁵ que son habituales en muchas disciplinas científicas. Por ejemplo, cálculo diferencial e integral, trigonometría, límites, polinomio de Taylor, algebra lineal, etc. Estos programas están orientados a problemas que puedan ser resueltos por estudiantes con conocimientos elementales de Matemáticas y Geología, ya sean de Bachillerato o Universidad.
- Programas de estadística con aplicación en el análisis de datos, tanto estadística descriptiva univariante como bivariante, y diseño de experimentos, es decir inferencia estadística. Estos programas están especialmente orientados a estudiantes con conocimientos elementales de Estadística y Geología de Universidad. Por sus características estos programas también pueden ser utilizados por estudiantes avanzados en un Trabajo Fin de Grado e incluso Trabajo Fin de Master.

En segundo lugar, a los alumnos se les proporcionará un manual básico sobre *programación en Python*. Además, se enseñarán los fundamentos de los procedimientos computacionales (cálculo científico) tanto de los métodos matemáticos como estadísticos, incluyéndose programas de ejemplo. En particular, nociones sobre cálculo integral, representaciones gráficas, métodos numéricos, cálculo simbólico, análisis de datos estadísticos, etc. sobre los que se sustenta la solución con ordenador de muchos de los problemas planteados. Además, se hará hincapié en la formulación del *modelo matemático* que resuelva el problema, y en las consecuencias de la resolución en relación con la realización de *predicciones* sobre el estado futuro del fenómeno tratado. Este es un aspecto fundamental para los alumnos: la *conexión* entre el modelo matemático, el trabajo experimental, ya sea en campo o laboratorio, y la predicción. Para conseguir este objetivo, es habitual estimar los parámetros del modelo a partir de los datos de campo o de laboratorio. O bien realizar *experimentos de simulación*⁶, es decir, predecir el estado futuro del fenómeno al variar sus parámetros y/o condiciones iniciales, analizando, de esta forma, su efecto.

A continuación, expondremos algunos de los casos de estudio, ya disponibles, en este proyecto docente.

CASOS DE ESTUDIO

Aunque resulte llamativo, incluso hoy en día, hay escasez de obras técnicas⁷ sobre matemáticas y estadística aplicadas a la Geología. Es por este motivo que en un futuro próximo se colaborará con profesores de la Facultad de Geología de la Universidad Complutense de Madrid. La idea es lograr su participación en el planteamiento de casos de estudio con suficiente realismo e interés para los estudiantes. A partir de una colección de casos, es decir de situaciones experimentales y fenómenos geológicos realistas, los estudiantes pondrán en práctica los conocimientos adquiridos en las asignaturas de Matemáticas y Estadística.

⁵ C. MARTÍNEZ-CALVO, E. FERNÁNDEZ BERMEJO, M. T. GONZÁLEZ-MANTEIGA, R. LAHOZ-BELTRÁ, C. PERALES GRAVÁN, 2005. *Matemáticas Básicas para Biólogos. CD-ROM. Innovación Educativa* (ISBN 84-7491-786-7). Editorial Complutense.

⁶ R. LAHOZ-BELTRÁ, 2013. Jugando a la Evolución con el Ordenador: En: *Jornadas sobre Investigación y Didáctica en ESO y Bachillerato*. Actas del II Congreso de Docentes de Ciencias de la Naturaleza (M. GÓZALEZ MONTERO DE ESPINOSA y A. BARATAS DÍAZ, eds.), Santillana Educación: 55-62.

⁷ D. WALTHAM, 2000. *Mathematics: A simple tool for geologists*. WILEY-BLACKWELL; J. FERGUSON, 1988. *Mathematics in Geology*. Springer Netherlands

El conjunto de scripts o programas en Python, junto con otros elementos será organizado con Jupyter Notebook. El resultado es el *Laboratorio de Geomatemática*, ejecutable en un navegador moderno: los *shells* interactivos combinan la ejecución de los scripts con documentos electrónicos con texto y fórmulas matemáticas sobre el caso de estudio así como gráficos, vídeos y otros elementos multimedia. Los vídeos muestran explicaciones con «voz en off». Puesto que Python es gratuito los alumnos pueden disponer de todo el material docente y usarlo libremente en su ordenador una vez se haya instalado cualquiera las distribuciones orientadas al ámbito científico, sea cual sea su sistema operativo (por ej., Anaconda, WinPython etc.). De esta forma acceden a «coste cero» a un software cuyas prestaciones son similares a MATLAB o con el que pueden hacer análisis estadísticos con una fiabilidad igual o incluso superior a paquetes estadísticos comerciales como por ej. Statgraphics.

CASO DE ESTUDIO I. MEDIDA DEL RADIO DE LA TIERRA

En este ejercicio se propone a los estudiantes calcular el radio de la Tierra mediante el procedimiento utilizado por el matemático, astrónomo y geógrafo griego Eratóstenes (276-194 a.C.), que fue el primero en determinar el tamaño de la Tierra. Según parece en la ciudad de Siena (actualmente Asuán) Eratóstenes observó a mediodía durante el solsticio de verano que objetos tales como un obelisco no producían sombra y en el fondo de los pozos podía verse la luz del sol. Por el contrario, en Alejandría, ciudad situada a unos 800 Km de Siena, un obelisco si tenía sombra. Eratóstenes calculó que un obelisco en Alejandría de 4 m de altura producía una sombra cuyo ángulo era de 7° 12'.

Asumiendo que la superficie terrestre esta curvada y que los rayos del sol llegan de forma paralela a la Tierra, y sin entrar en otros detalles de la explicación, Eratóstenes fue capaz de calcular el radio terrestre en aproximadamente unos 6.300 km:

$$800 = r_{Tierra} \cdot 7^{\circ} 12'$$

$$r_{Tierra} = \frac{800}{7^{\circ} 12' \cdot \frac{\pi}{180}}$$

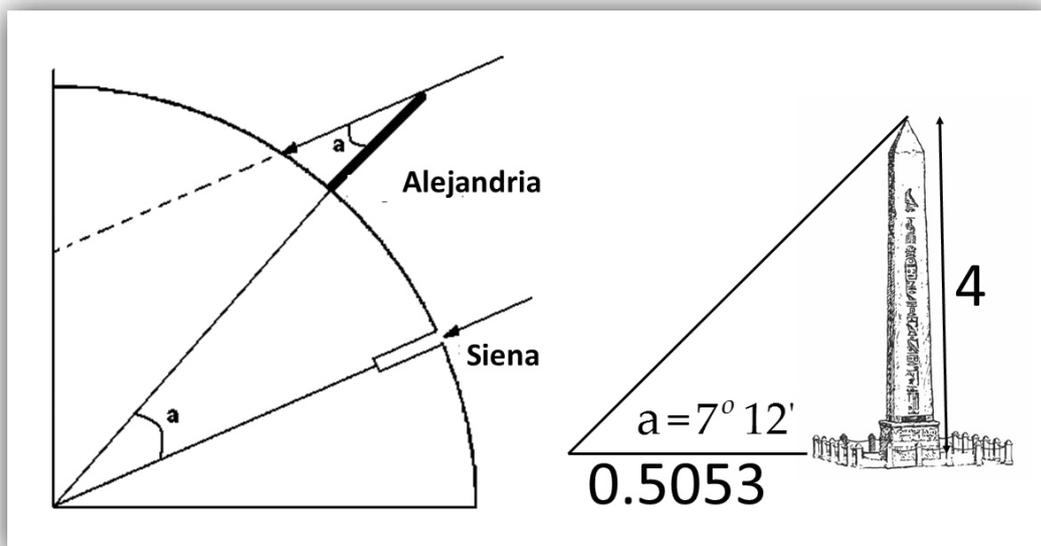


Figura 1. Método trigonométrico empleado por Eratóstenes

Los cálculos realizados por Eratóstenes pueden ser realizados hoy en día con Python haciendo uso de un sencillo *script* ¡2000 años después! tal y como se muestra a continuación:

```

1 import math
2 # Datos del obelisco de Alejandria
3 altura_obelisco=4
4 distancia_sombra=0.5053
5 distancia_Siena_Alejandria=800
6 # Calculos
7 tg=distancia_sombra/altura_obelisco
8 beta=math.atan(tg)*(180/math.pi)
9 # Estimacion radio terrestre
10 r = distancia_Siena_Alejandria/(beta*(math.pi/180))
11 print("radio Tierra",r)

```

obteniendo con el ordenador un valor del radio terrestre igual a 6366.4160615958435 km.

CASO DE ESTUDIO 2. CÁLCULO DEL VOLUMEN DEL MONTE FUJI (JAPÓN)

El objetivo de ejercicio es realizar una aproximación al volumen del Monte Fuji utilizando un modelo matemático. El modelo en cuestión representa la variación de su radio con la altura⁸, tal y como se muestra a continuación:

$$r^2(z) = \frac{400}{3}z - \frac{800}{\sqrt{3}}\sqrt{z} + 400 \quad (\text{Km}^2)$$

y cuya representación gráfica se muestra en la Figura 2. La obtención de este modelo matemático para el radio del Monte Fuji es el paso clave para poder calcular su volumen, que se obtendrá recurriendo al cálculo integral:

$$V = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \pi f^2(y) dy$$

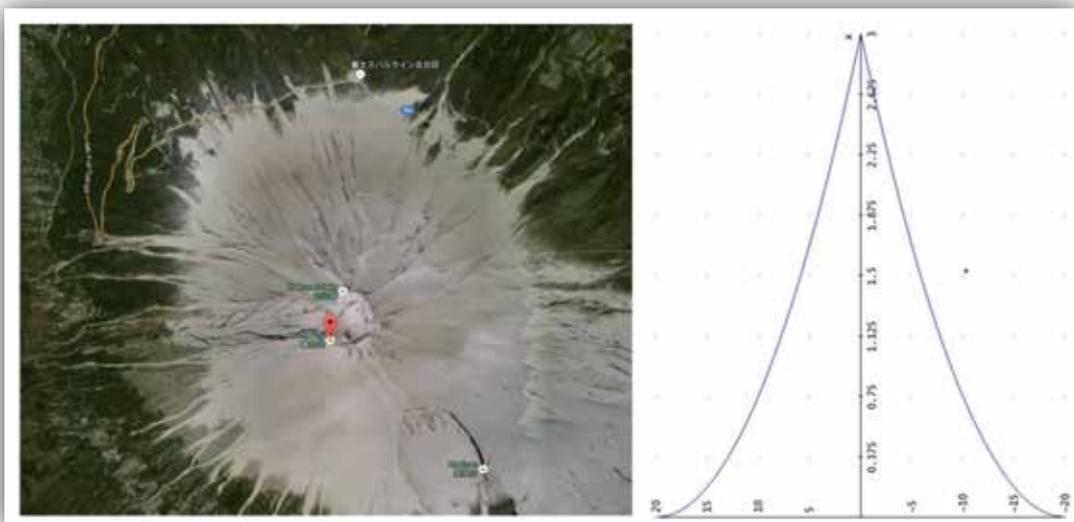


Figura 2. Mapa obtenido por GoogleMaps y modelo del Monte Fuji.

⁸ D. WALTHAM, 2000. Mathematics: A simple tool for geologists. WILEY-BLACKWELL; J. FERGUSON, 1988. *Mathematics in Geology*. Springer Netherlands.

Si calculamos «a mano» dicha integral:

$$V = \int_0^3 \pi \left[\frac{400z}{3} - \frac{800\sqrt{z}}{\sqrt{3}} + 400 \right] dz = \pi \left[\frac{400z^2}{6} - \frac{800z^{3/2}}{1.5\sqrt{3}} + 400z \right]_0^3 = 200\pi ; 628$$

obtendremos que el volumen del volcán es aproximadamente 628 Km³. Resolvamos ahora con Python la integral planteada:

```
1 from sympy import integrate, Symbol, pi, sqrt
2 # Definición de variables simbólicas
3 z = Symbol('z')
4 # Modelo matemático
5 f=pi*((400*z)/3 - (800*sqrt(z))/sqrt(3)+400)
6 # Cálculo de la integral
7 v=integrate(f,(z,0,3))
8 print(v.evalf())
```

siendo el volumen calculado igual a 628.318530717959 Km³.

CASO DE ESTUDIO 3. DEDUCIR SI HA CAMBIADO EL CAUDAL DEL RÍO JAMES (VIRGINIA, EE.UU.)

El objetivo es analizar estadísticamente si el caudal de este río se ha modificado comparando su caudal en dos épocas o estaciones. Los alumnos compararán las medias de dos muestras correspondientes a dos épocas distintas, mediante un contraste de hipótesis sobre el caudal medio del río (en las dos muestras). La prueba utilizada será el test de la t-Student. La programación en Python y los resultados se muestran en la Figura 3, aceptándose que no ha habido diferencias significativas en el caudal entre las dos estaciones estudiadas.

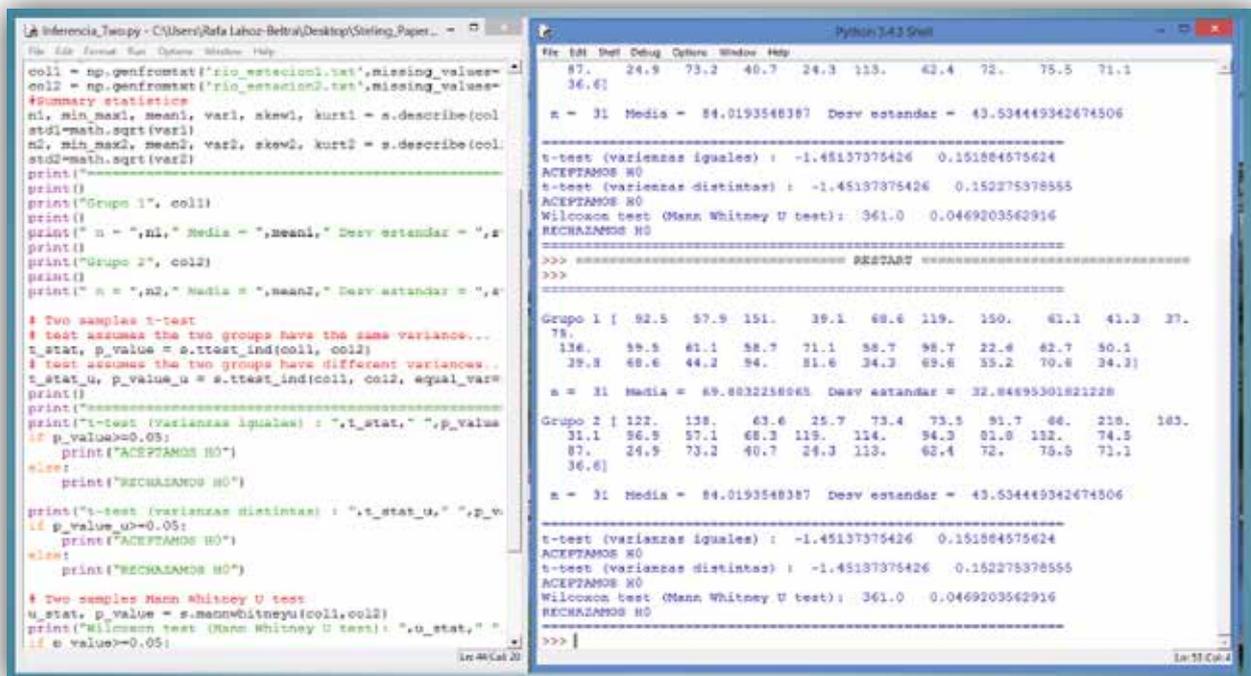


Figura 3. Script en Python del contraste de hipótesis sobre el caudal medio del río James (izda.) y resultado del test para la toma de decisiones (dcha.).

CONCLUSIONES

El proyecto que planteamos representa los primeros pasos de un programa de innovación docente relacionado con la enseñanza de las Matemáticas y Estadística a estudiantes de Geología. La incorporación de las tecnologías de la información a los procesos de enseñanza y aprendizaje no sólo representa el medio en el que se desenvuelve el aprendizaje sino también un estímulo. El objetivo fundamental es el afianzamiento de los conocimientos matemáticos básicos del alumnado y su ampliación mediante la utilización de problemas reales del ámbito de la Geología. La consecución de este objetivo se logrará mediante la utilización del lenguaje Python que, adicionalmente, traerá las ventajas del aprendizaje de un lenguaje de programación que día tras día gana numerosos adeptos en todo el mundo. Realizando en el aula los ejercicios propuestos los estudiantes de Geología aprenderán el «manejo del ordenador» incorporándolo como una herramienta más del geólogo junto con la «brújula y martillo».